I dalis

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	C	A	A	D	B	C	B	C

II dalis

11.1. 12

11.2. 15π

11.3. 18 kartų

12. $6\ h$

13.1. $60°$

13.2. $-\vec{a}-\vec{b}$

14.1. $\frac{1}{36}$

14.2. $\frac{15}{16}$

15. 23

16. 9

17. 30

18. $4-\sqrt{3}$

III dalis

19. Rokas iš banko paėmė paskolą šeimos kelionei. Grąžinti paskolą jis turi, mokėdamas įmokas kas mėnesį, pagal tokią schemą: pirmojo mėnesio pabaigoje jis turi sumokėti 120 Eur, o po to kiekvieno kito mėnesio pabaigoje turi sumokėti 5 % daugiau negu prieš tai buvusį mėnesį.

B➔19.1. Kiek eurų Rokas turi sumokėti bankui antrojo mėnesio pabaigoje?

(1 taškas)

Sprendimas

$120 \cdot 1{,}05 = 126\ Eur$

B➔19.2. Kiek iš viso eurų Rokas bus sumokėjęs bankui po trijų mėnesių?

(2 taškai)

Sprendimas

$120 + 126 + 126 \cdot 1.05 = 378.3\ Eur$

19.3. Užrašykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti, kiek iš viso eurų Rokas bus sumokėjęs bankui po n mėnesių. Atsakymą pateikite reiškiniu $K(a^n - 1)$, kai K yra natūralusis skaičius, o a – realusis teigiamasis skaičius[20].

(1 taškas)

Sprendimas

$120 + 120 \cdot 1.05 + 120 \cdot 1.05^2 + \cdots + 120 \cdot 1.05^{n-1} = 120(1 + 1.05 + 1.05^2 + \cdots + 1.05^{n-1}) =$

$= 120\left(\dfrac{1 - 1.05^n}{1 - 1.05}\right) = 2400(1.05^n - 1)$

20. Duota funkcija $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$.

B➔20.1. Raskite funkcijos išvestinę $f'(x)$.

(1 taškas)

$f'(x) = 12x^2 - 18x + 6$

B➔20.2. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $y = f(x)$ reikšmės didėja.

(2 taškai)

Didėja, kai $f'(x) > 0$.
$12x^2 - 18x + 6 > 0 \quad |:6$
$2x^2 - 3x + 1 > 0 \quad |:6$
$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$
$x_1 = \frac{3+1}{4} = 1,$
$x_2 = \frac{3-1}{4} = 0{,}5.$
ATS.: $(-\infty; 0{,}5) \cup (1;\ +\infty)$

20.3. Įrodykite, kad funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės krypties koeficientas[21] negali būti lygus -1.

(2 taškai)

$12x^2 - 18x + 6 = -1$
$12x^2 - 18x + 7 = 0$
$D = 18^2 - 4 \cdot 12 \cdot 7 = 324 - 336 = -12 < 0.$
Kadangi diskriminantas neigiamas, tai realių sprendinių nėra.

20.4. Raskite, su kuria a reikšme lygybė $\int_{-1}^{a} f(x)\,dx = -3a^3 - 7$ yra teisinga.

(3 taškai)

$$\int_{-1}^{a} (4x^3 - 9x^2 + 6x)dx = \left(\frac{4x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{a} = a^4 - 3a^3 + 3a^2 - 7$$

$a^4 - 3a^3 + 3a^2 - 7 = -3a^3 - 7$

$a^4 + 3a^2 = 0$

$a^2(a^2 + 3) = 0$

$a^2 = 0$ *arba* $a^2 = -3$

$a = 0$ $\quad\varnothing$

ATS.: $a = 0$

21. Išspręskite lygtis:

B➔21.1. $\log_2(9-x^2)=3;$

(2 taškai)

Sprendimas

$log_2(9-x^2) = 3$

$log_2(9-x^2) = 3log_2 2$
$9-x^2 = 2^3$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$
ATS.: $x = \pm 1$

B➔21.2. $2\sin x = 1$, kai $x \in (90°; 180°);$

(2 taškai)

Sprendimas

$2sinx = 1$

$sinx = 1/2$
$x = (-1)^k arcsin\dfrac{1}{2} + \pi k$
$x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$
Kai k=0, tai $x = \frac{\pi}{6}, \notin (90°, 180°)$.
Kai k=1, tai $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}, \in (90°, 180°)$.
Kai k=2, tai $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}, \notin (90°, 180°)$.
ATS.: $x = \frac{5\pi}{6}$ $arba$ $150°$

21.3. $\sqrt{2-x} = \sqrt{x} - 2.$

(3 taškai)

Sprendimas

$\sqrt{2-x} = \sqrt{x} - 2$

Keliame abi lygties puses kvadratu:
$2 - x = x - 4\sqrt{x} + 4$
$2 - x - x + 4\sqrt{x} - 4 = 0$
$-2x + 4\sqrt{x} - 2 = 0$
$4\sqrt{x} = 2 + 2x$
$16x = 4 + 8x + 4x^2$
$4x^2 - 8x + 4 = 0 \quad |:4$
$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2$=0
x=1

Patikrinimas:
$\sqrt{2-1}=1\neq\sqrt{1}-2=-1$
1$\neq -1$
Lygtis sprendinių neturi.

ATS.: Ø

22. Dėžėje yra vienodo dydžio mėlynų, žalių ir raudonų kamuoliukų. Yra žinoma, kad tikimybė iš dėžės atsitiktinai ištraukti mėlyną kamuoliuką lygi $\frac{1}{5}$, o tikimybė iš dėžės atsitiktinai ištraukti žalią kamuoliuką lygi tikimybei iš dėžės atsitiktinai ištraukti raudoną kamuoliuką.

B➔22.1. Iš dėžės atsitiktinai traukiamas vienas kamuoliukas. Apskaičiuokite tikimybę, kad jis bus raudonas.

(1 taškas)

Sprendimas

$$P=\left(1-\frac{1}{5}\right):2=\frac{2}{5}$$

22.2. Iš dėžės atsitiktinai ištraukiamas vienas kamuoliukas, įsimenama jo spalva ir jis grąžinamas atgal į dėžę. Tada dar kartą iš dėžės atsitiktinai ištraukiamas vienas kamuoliukas ir vėl įsimenama jo spalva. Apskaičiuokite tikimybę, kad:

22.2.1. abu kartus bus ištraukti mėlynos spalvos kamuoliukai;

(1 taškas)

Sprendimas

$$P=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$$

22.2.2. abu kartus bus ištraukti skirtingų spalvų kamuoliukai.

(2 taškai)

Sprendimas

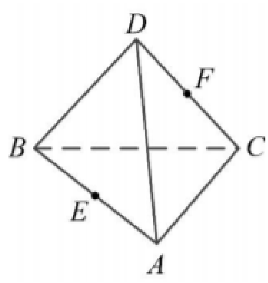
I būdas

$$P=1-\frac{1}{25}-\frac{4}{25}-\frac{4}{25}=\frac{16}{25}$$

II būdas

$$P=\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot 2=\frac{16}{25}$$

23. Paveiksle pavaizduotas tetraedras[22] *ABCD*, kurio briaunų[23] ilgiai lygūs 6, o taškai *E* ir *F* yra atitinkamai briaunų *AB* ir *CD* vidurio taškai.



B➔23.1. Apskaičiuokite tetraedro viso paviršiaus[24] plotą.

(1 taškas)

Sprendimas

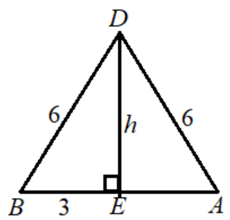
$S_{teatr} = 4 \cdot S_{trik.} = 36\sqrt{3}$

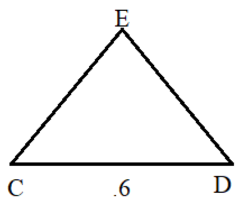
$S_{trik.} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}6^2 = 9\sqrt{3}$ *(trikampis lygiakraštis)*

ATS.: $36\sqrt{3}$

23.2. Apskaičiuokite kosinusą kampo, kurį sudaro tetraedro šoninė[25] briauna *CD* su pagrindo plokštuma[26] *ABC*.

(2 taškai)





$$\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 6^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}\cos(\angle DCE)$$

$$\cos(\angle DEC) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

23.3. Įrodykite, kad $EF \perp AB$.

(1 taškas)

I būdas

EF – lygiašonio ∆DEC – aukštinė, todėl EF⊥CD. Analogiškai ∆BFA – lygiašonis ir EF yra aukštinė, todėl EF⊥AB.

23.4. Įrodykite, kad atkarpos *EF* ilgis lygus atstumui tarp prasilenkiančių tiesių[27] *AB* ir *CD*. Atkarpos *EF* ilgio apskaičiuoti nereikia.

(1 taškas)

EF yra bendras prasilenkiančių tiesių statmuo, tai ir yra atstumas tarp prasilenkiančių tiesių.

24. Raskite argumento x reikšmę, su kuria funkcija $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ įgyja didžiausią reikšmę intervale $x\in\left[\frac{1}{e};e^3\right]$. Atsakymą pagrįskite.

(3 taškai)

Sprendimas

$f(x)=\frac{lnx}{x}$, x>0.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-lnx\cdot 1}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}$$

$1-lnx=0$

$lnx=1$

x=e

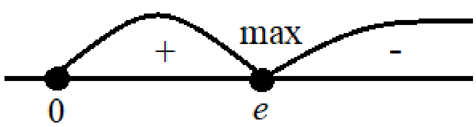
I būdas

$$f(e)=\frac{lne}{e}=\frac{1}{e}\ (max)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{lne^{-1}}{1/e}=-e$$

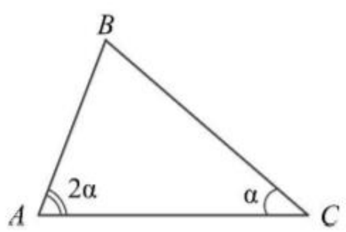
$$f(e^3)=\frac{lne^3}{e^3}=\frac{3}{e^3}$$

II būdas

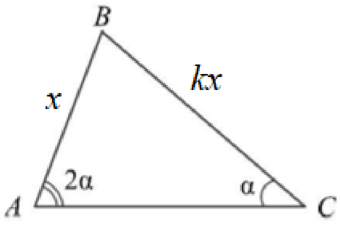


ATS.: *x=e*

25. Trikampio ABC kampas ACB lygus α, o kampas BAC lygus 2α; $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$. Kraštinės BC ilgis yra k kartų didesnis už kraštinės AB ilgį. Įrodykite, kad $\cos\alpha=\frac{k}{2}$, ir nustatykite visas galimas k reikšmes.



(3 taškai)



$$\frac{x}{sin\alpha} = \frac{kx}{sin2\alpha}$$

$$\frac{x}{sin\alpha} = \frac{kx}{2sin\alpha cos\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{k}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) < \frac{k}{2} < cos0$$

ATS.: $1 < k < 2$

26. Skaičiai a, b ir c yra trys iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai[28] (čia $a \neq b$), o skaičiai b, c ir a yra trys iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai. Apskaičiuokite geometrinės progresijos vardiklį[29].

(4 taškai)

Sprendimas

Aritmetinė progresija:
a, b, c, t. y. a; a+d; a+2d;
čia d – aritmetinės progresijos skirtumas.

Geometrinės progresija
b, c, a, t. y. a+d; a+2d; a.

$$q = \frac{a+2d}{a+d} = \frac{a}{a+2d}$$

$(a+2d)^2 = a(a+d)$
$a^2 + 4ad + 4d^2 = a^2 + ad$
$3ad + 4d^2 = 0$
$d(3a+4d) = 0$
$d = 0$ (netinka)
$3a + 4d = 0$
$3a = -4d$
$a = \frac{-4d}{3}$.

$$q = \frac{a}{a+2d} = \frac{\frac{-4d}{3}}{\frac{-4d}{3} + 2d} = \frac{-4d}{-4d+6d} = \frac{-4d}{2d} = -2.$$