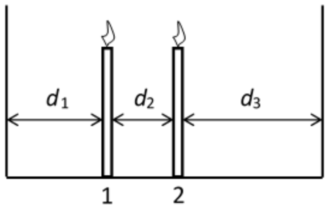
ktu
matematikos ir gamtos mokslų fakultetas
1922

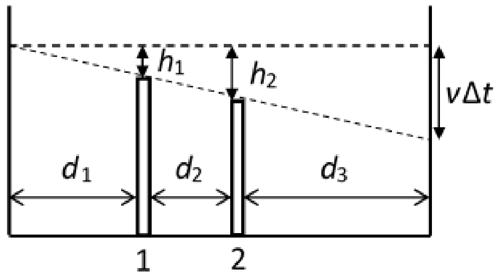
XXIV prof. K. Baršausko fizikos konkursas
Kaunas, 2019-03-02
11 klasės uždavinių sprendimai

1. Baronas Miunhauzenas savo prisiminimus užrašinėjo vėlų vakarą degant žvakėms. Dvi vienodo ilgio $\ell = 25$ cm žvakes jis uždegė vienu metu ir pastatė taip, kaip parodyta piešinyje. Greitai baronas pastebėjo, kad pirmosios žvakės šešėlis ant kairiosios sienos nejuda, o dešiniosios trumpėja greičiu $v = 1$ cm/min. Tuomet jis apskaičiavo, po kiek laiko liks degti tik viena žvakė, ir po kiek laiko jis liks tamsoje. Pamėginkite ir jūs apskaičiuoti pirmosios ir antrosios žvakių degimo trukmes. Atstumai: $d_1 = 2$ m, $d_2 = 1$ m, $d_3 = 3$ m. (4 balai)



Sprendimas:

Tarkime, kad per laiką Δt pirmoji žvakė degdama sutrumpėjo dydžiu h_1, o antroji – h_2. Antrosios žvakės šešėlis per tą laiką ant dešiniosios sienos nusileido dydžiu $v\Delta t$. Tarp punktyrinių linijų turime tris panašius trikampius, kuriems galime užrašyti:



$$\frac{h_1}{d_1} = \frac{h_2}{d_1 + d_2} = \frac{v \cdot \Delta t}{d_1 + d_2 + d_3}.$$

Išreiškiame žvakių trumpėjimo greičius:

$$v_1 = \frac{h_1}{\Delta t} = v \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_2 + d_3}; \quad v_2 = \frac{h_2}{\Delta t} = v \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1 + d_2 + d_3}.$$

Pirmoji žvakė sudegs per laiką t_1:

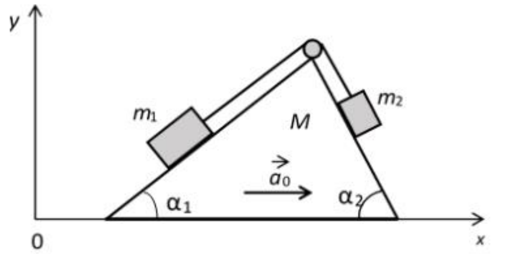
$$t_1 = \frac{\ell}{v_1} = \frac{\ell(d_1 + d_2 + d_3)}{v d_1} = \frac{0{,}25 \cdot (2 + 1 + 3)}{0{,}01 \cdot 2} = 75 \text{ min}$$

Antroji žvakė sudegs per laiką t_2:

$$t_2 = \frac{\ell}{v_2} = \frac{\ell(d_1 + d_2 + d_3)}{v(d_1 + d_2)} = \frac{0{,}25 \cdot (2 + 1 + 3)}{0{,}01 \cdot (2 + 1)} = 50 \text{ min}$$

Atsakymas: dešinioji žvakė užges po 50 min, o kairioji žvakė užges po 75 min.

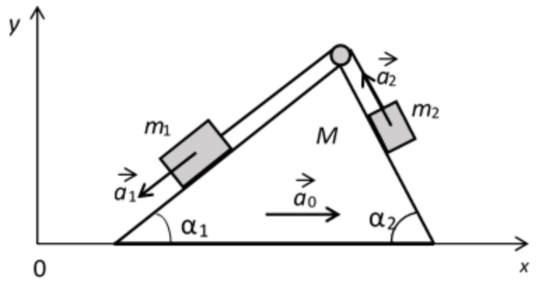
2. $M = 0{,}3$ kg masės trikampės trinkelės kampai prie pagrindo yra $\alpha_1 = 30^\circ$ ir $\alpha_2 = 60^\circ$. Ji gali slysti idealiu horizontaliu paviršiumi be trinties. Skirtingose trinkelės pusėse padėti du $m_1 = 0{,}2$ kg ir $m_2 = 0{,}3$ kg masių kūneliai, sujungti netampriu siūlu, permestu per skridinį, įtvirtintą trinkelės viršūnėje. Kūneliai gali slysti trinkelės sienelėmis be trinties. Pradiniu laiko momentu ši sistema yra rimties būsenoje.



Kokiu pagreičiu a_0 slys trinkelė leidus laisvai slysti kūneliams? Kokiais pagreičiais trinkelės atžvilgiu slys kūneliai? Koks turėtų būti kūnelių masių m_1 ir m_2 santykis, kad kūneliams slystant trinkelės paviršiumi, ji nepajudėtų? Siūlo ir skridinio masių nevertinti. (6 balai)

Sprendimas:

Šis uždavinys sprendžiamas taikant tvermės dėsnius. Tarkime, kad kūneliai trinkelės atžvilgiu slysta a modulio pagreičiais, o trinkelė slysta horizontalia plokštuma a_0 modulio pagreičiu. m_1 masės kūnelis pradeda leistis žemyn, o m_2 masės kūnelis pradeda kilti aukštyn. Tuomet trinkelė pajuda dešinėn. Kadangi trinkelės ir kūnelių sistemą horizontalia kryptimi neveikia jokios išorinės jėgos, tai visų sistemos kūnų judesio



kiekių projekcijų Ox ašyje suma išlieka pastovi. Pradiniu laiko momentu visi kūnai yra rimties būvyje ir jų judesio kiekių projekcijų Ox ašyje suma lygi nuliui. Kūnams pajudėjus:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + M v_x = 0, \tag{1}$$

čia v_{1x}, v_{2x}, v_x – kūnelių ir trinkelės greičių projekcijos Ox ašyje.

Sistemos kūnų pagreičių projekcijos Ox ir Oy ašyse:

$$a_{1x} = a_0 - a\cos\alpha_1; \qquad a_{1y} = -a\sin\alpha_1;$$

$$a_{2x} = a_0 - a\cos\alpha_2; \qquad a_{2y} = a\sin\alpha_2;$$

$$a_x = a_0.$$

Čia įvertinta, kad pirmojo ir antrojo kūnelių pagreičių tašelio atžvilgiu moduliai vienodi: $a_1 = a_2 = a$. Tuomet praėjus laikui t nuo judėjimo pradžios kūnai įgis tokius greičius:

$$v_{1x} = a_{1x}t, \quad v_{2x} = a_{2x}t, \quad v_x = a_x t.$$

Įstatome šias greičių projekcijas į (1) lygtį:

$$m_1(a_0 - a\cos\alpha_1)t + m_2(a_0 - a\cos\alpha_2)t + M a_0 t = 0.$$

Iš šios lygties išreiškiame pagreitį a:

$$a = a_0 \frac{M + m_1 + m_2}{m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2}. \tag{2}$$

Kadangi uždavinyje nevertinama trinties jėga, tai galima taikyti mechaninės energijos tvermės dėsnį. Didėjant judančių kūnų greičiams ir jų kinetinei energijai tiek pat sumažėja jų potencinė energija:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p;$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{M v^2}{2} = -(m_1 g \Delta y_1 + m_2 g \Delta y_2); \tag{3}$$

čia

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} \cdot t,$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} \cdot t,$$

$$v = a_0 t,$$

$$\Delta y_1 = \frac{a_{1y}t^2}{2}, \qquad \Delta y_2 = \frac{a_{2y}t^2}{2}.$$

Gautąsias išraiškas įstatome į (3) lygtį ir ją sutvarkome:

$$m_1[(a_0 - a\cos\propto_1)^2 + a^2\sin^2\propto_1] + m_2[(a_0 - a\cos\propto_2)^2 + a^2\sin^2\propto_2] + M a_0^2 =$$
$$= m_1 g a\sin\propto_1 - m_2 g a \sin\propto_2.$$

Įstačius į šią lygtį pagreitį a iš (2) formulės, išreiškiamas a_0:

$$a_0 = \frac{(m_1\sin\propto_1 - m_2\sin\propto_2)(m_1\cos\propto_1 + m_2\cos\propto_2)}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2) - (m_1\cos\propto_1 + m_2\cos\propto_2)^2} g =$$

$$= \frac{(0{,}2 \cdot \sin30° - 0{,}3 \cdot \sin60°)(0{,}2 \cdot \cos30° + 0{,}3 \cdot \cos60°) \cdot 9{,}8}{(0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}3)(0{,}2 + 0{,}3) - (0{,}2 \cdot \cos30° + 0{,}3 \cdot \cos60°)^2} = -1{,}71 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Tuomet

$$a = a_0 \frac{M + m_1 + m_2}{m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2} = -1{,}71 \cdot \frac{0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}3}{0{,}2 \cdot \cos30° + 0{,}3 \cdot \cos60°} = -4{,}23 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Kai tenkinama sąlyga $m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2 = 0$, t. y. kai kūnelių masių santykis tenkina sąlygą

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \propto_2}{\sin \propto_1} = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = 1{,}732, \qquad (4)$$

tai $a_0 = 0$, o kadangi pradinis tašelio greitis $v_0 = 0$, tai jis taip ir nepajudės.

Iš (2) lygties matome, kad galiojant sąlygai (4), kūnelių pagreičiai tašelio atžvilgiu taip pat lygūs nuliui, t. y. nejudančiu tašeliu kūneliai galėtų tik tolygiai slysti.

Atsakymas: trinkelė slys pagreičiu a_0 = 1,71 m/s^2 kairėn, o kūneliai trinkelės atžvilgiu slys vienodo modulio pagreičiais a = 4,23 m/s^2 priešinga kryptimi, nei pažymėta sprendimo brėžinyje. Kūneliams tolygiai slystant trinkelės paviršiumi, ši nepajudėtų, jei kūnelių masių santykis būtų m_1/m_2=1,732.

3. Vandeniui pašildyti naudojamas elektrinis virdulys, kurio galia P = 500 W. Per dvi minutes vandens temperatūra pakilo nuo t_1 = 85 ºC iki t_2 = 90 ºC. Išjungus virdulį vandens temperatūra per vieną minutę sumažėjo vienu laipsniu. Kokia virdulyje esančio vandens masė? Vandens savitoji šiluma $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ J/(kg·K), virdulio šiluminė talpa C = 200 J/K. (4 balai)

Sprendimas:

Vandeniui pašildyti sunaudojama energija:

$$P \cdot \tau_1 = cm(T_2 - T_1) + C(T_2 - T_1) + Q_1;$$

čia P – šildytuvo galia, τ_1 – šildymo trukmė, c – vandens savitoji šiluma, m – vandens masė, T_1 – pradinė vandens temperatūra, T_2 – galinė vandens temperatūra, C – virdulio šiluminė talpa, Q_1 – energijos nuostoliai, proporcingi vandens ir aplinkos temperatūrų skirtumui ir šildymo laikui τ_1.

Vandeniui virdulyje vėstant per laiką τ_2 į aplinką atiduodamas šilumos kiekis Q_2:

$$Q_2 = cm\Delta T + C\Delta T;$$

čia $\Delta T = 1$ ℃.

Kadangi virdulio su vandeniu ir oro temperatūrų skirtumas šildant ir vėstant skiriasi nežymiai, o $\tau_2 = 0{,}5\tau_1$, tai $Q_2 = 0{,}5Q_1$. Tuomet

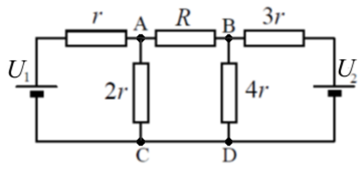
$$\mathrm{P} \cdot \tau_1 = cm(T_2 - T_1) + C(T_2 - T_1) + 2(cm\Delta T + C\Delta T).$$

Iš gautosios lygties išreiškiame vandens masę:

$$m = \frac{\mathrm{P} \cdot \tau_1 - C(T_2 - T_1 + 2\Delta T)}{c(T_2 - T_1 + 2\Delta T)} = \frac{500 \cdot 120 - 200(90 - 85 + 2)}{4190(90 - 85 + 2)} = 2 \text{ kg}$$

Atsakymas: virdulyje yra 2 kg vandens.

4. Koks turi būti pateiktoje schemoje srovės šaltinių įtampų santykis U_1/U_2, kad per rezistorių R netekėtų srovė? Kitų rezistorių varžos pateiktos schemoje. (3 balai)



Sprendimas:

Jeigu srovė neteka per rezistorių R, tai galime atskirai nagrinėti kairiąją ir dešiniąją grandinės dalis. Kairiąją dalį sudaro įtampos U_1 srovės šaltinis ir rezistoriai r bei $2r$, o dešiniąją – įtampos U_2 srovės šaltinis ir rezistoriai $3r$ ir $4r$. Srovė per rezistorių R netekės tuo atveju, kai įtampos tarp taškų A ir C bei B ir D bus lygios: $U_{AC} = U_{BD}$. Pasinaudodami Omo dėsniu uždarajai grandinei apskaičiuojame srovės stiprius kairiojoje ir dešiniojoje schemos dalyse:

$$I_k = \frac{U_1}{R_k};$$

$$I_d = \frac{U_2}{R_d}.$$

Rezistoriai kairiojoje ir dešiniojoje schemos dalyse yra sujungti nuosekliai:

$$R_k = r + 2r = 3r;$$

$$R_d = 3r + 4r = 7r.$$

Apskaičiuojame įtampas U_{AC} ir U_{BD}:

$$U_{AC} = I_k \cdot 2r = \frac{U_1}{3r} \cdot 2r = \frac{2}{3} U_1;$$

$$U_{BD} = I_d \cdot 4r = \frac{U_2}{7r} \cdot 4r = \frac{4}{7} U_2.$$

Sulyginame įtampas U_{AC} ir U_{BD}:

$$\frac{2}{3} U_1 = \frac{4}{7} U_2.$$

Išreiškiame srovės šaltinių įtampų santykį:

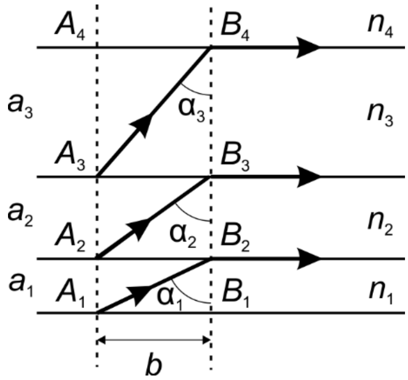
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 7} = \frac{6}{7}.$$

Atsakymas:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{6}{7}.$$

5. Keturios skirtingos stiklo plokštelės yra sudėtos viena ant kitos. Apatinės stiklo plokštelės storis yra a_1, o lūžio rodiklis n_1 = 2,7; antrosios storis a_2, lūžio rodiklis n_2 = 2,43; trečiosios ir ketvirtosios storiai a_3 ir a_4, o lūžio rodikliai n_3 ir n_4 atitinkamai. Trys šviesos pluoštai, vienu metu pradedantys sklisti iš taškų A_1, A_2, A_3, vienu metu pasiekia taškus B_2, B_3, B_4, o pluoštų kritimo kampai yra lygūs ribiniams visiškojo atspindžio kampams kaip pavaizduota paveiksle. $A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = b$ = 10 mm. Apskaičiuokite storius a_1, a_2, a_3 ir lūžio rodiklius n_3, n_4. (6 balai)

Sprendimas:



Pažymėkime spindulių kritimo kampus α_1, α_2 ir α_3. Šviesa per vienodą laiką nusklinda atstumus:

$$A_1B_2 = \frac{b}{\sin\alpha_1}; \quad A_2B_3 = \frac{b}{\sin\alpha_2}; \quad A_3B_4 = \frac{b}{\sin\alpha_3}.$$

Šviesos sklidimo greičiai skirtingo stiklo plokštelėse:

$$c_1 = \frac{c}{n_1}; \quad c_2 = \frac{c}{n_2}; \quad c_3 = \frac{c}{n_3}.$$

Šviesos sklidimo atkarpose trukmės yra vienodos ir gali būti užrašytos:

$$t = \frac{A_1B_2}{c_1} = \frac{n_1}{c} \frac{b}{\sin\alpha_1} = \frac{A_2B_3}{c_2} = \frac{n_2}{c} \frac{b}{\sin\alpha_2} = \frac{A_3B_4}{c_3} = \frac{n_3}{c} \frac{b}{\sin\alpha_3}.$$

Iš šviesos lūžio dėsnio žinome:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c}{n_1} \cdot \frac{n_2}{c} = \frac{n_2}{n_1}$$

Laikydami, kad ribinio kritimo kampo atveju $\sin\beta = 1$, gauname:

$$\sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}; \quad \sin\alpha_2 = \frac{n_3}{n_2}; \quad \sin\alpha_3 = \frac{n_4}{n_3}.$$

Šias išraiškas įstatę į šviesos sklidimo atkarpose trukmės išraiškas bei padalinę iš b/c gauname:

$$\frac{n_1^2}{n_2} = \frac{n_2^2}{n_3} = \frac{n_3^2}{n_4} = K;$$

čia K - konstanta. Kadangi pirmieji du lūžio rodikliai yra duoti, tai konstantą galime apskaičiuoti:

$$K = \frac{2{,}7^2}{2{,}43} = 3.$$

Tuomet likę du nežinomi lūžio rodikliai gali būti apskaičiuojami:

$$n_3 = \frac{n_2^2}{K} = \frac{2{,}43^2}{3} = 1{,}968;$$

$$n_4 = \frac{n_3^2}{K} = \frac{1{,}968^2}{3} = 1{,}291.$$

Tam, kad nustatytume sluoksnių storius pirmiausia reikia apskaičiuoti šviesos kritimo kampus:

$$\sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2{,}43}{2{,}7} = 0{,}90 \to \alpha_1 = 64{,}16°$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{n_3}{n_2} = \frac{1{,}968}{2{,}43} = 0{,}810 \to \alpha_2 = 54{,}08°$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{n_4}{n_3} = \frac{1{,}291}{1{,}968} = 0{,}656 \to \alpha_3 = 41{,}00°$$

Apatinės plokštelės storį išreiškiame iš stataus trikampio:

$$a_1 = \frac{b}{\mathrm{tg}\,\alpha_1}.$$

Įrašę žinomas vertes randame apatinės stiklo plokštės storį:

$$a_1 = \frac{10}{\mathrm{tg}\,64{,}16°} = 4{,}84 \text{ mm};$$

Analogiškai apskaičiuojame kitų dviejų plokštelių storius:

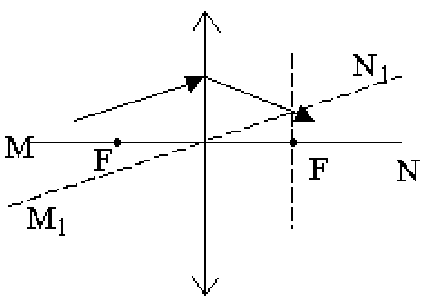
$$a_2 = \frac{b}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{10}{\mathrm{tg}\,54{,}08°} = 7{,}24 \text{ mm};$$

$$a_3 = \frac{b}{\mathrm{tg}\,\alpha_3} = \frac{10}{\mathrm{tg}\,41{,}00°} = 11{,}5 \text{ mm};$$

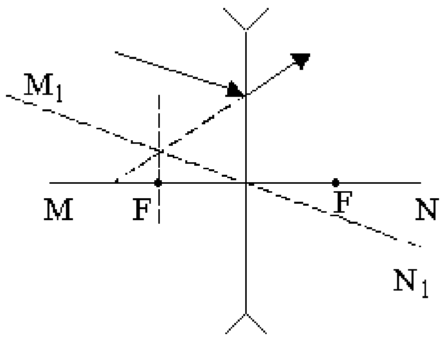
Atsakymas: a_1 = 4,84 mm, a_2 = 7,24 mm, a_3 = 11,5 mm, n_3 = 1,968, n_4 = 1,291.

6. Paveiksluose a ir b pavaizduoti spinduliai, krentantys į glaudžiamąjį ir sklaidomąjį lęšius ir jų eiga už lęšių. MN – lęšio pagrindinė optinė ašis. Braižymo būdu nustatykite lęšių židinių padėtis. (3 balai)

Sprendimas:



a



b

Lęšių židiniams nustatyti brėžiame šalutines optines ašis M_1N_1, lygiagrečias su krintančiu spinduliu. Šalutinė optinė ašis kertasi su pro lęšį praėjusiu spinduliu židinio plokštumoje (a pav.) arba su praėjusio spindulio tęsiniu (b pav.). Iš susikirtimo taško nuleidę statmenį į MN, gauname pagrindinį lęšio židinį F. Kitas židinys – simetriškas pirmajam lęšio optinio centro atžvilgiu.