Matematikos valstybinio brandos egzamino atsakymai ir sprendimai

I dalis

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	C	B	C	A	B	D	C	B

II dalis

11.1. 5

11.2. $\frac{19}{25}$

12. $2\sqrt{2}$

13.1. $1 - k^2$

13.2. $-k$

14.1. 0,25

14.2. 0,95

15. 17

16. 4

17.1. $(-6;\ -5) \cup (0; 5)$

17.2. 0

17.3. $y = -2x + 4$

III dalis

B➔18. Sporto klube viena treniruotė kainuoja 15 Eur. Šiame sporto klube vyksta akcija – kas penktai treniruotei taikoma 60 % nuolaida. Simas treniruotėms skyrė 250 Eur. Apskaičiuokite, kiek daugiausia treniruočių akcijos metu jis gali apmokėti už šiuos pinigus.

(2 taškai)

Sprendimas. Kas penkta treniruotė kainuoja $15 \cdot 0{,}4 = 6$ eurai.

Penkių treniruočių komplektas kainuoja $15 \cdot 4 + 6 = 66$ eurai

Trys tokie pilni komplektai kainuoja 198 eurus. Dar liek 52 eurai. Už juos Simas gali nusipirkti dar 3 treniruotes.

Iš viso $3 \cdot 5 + 3 = 18$ treniruočių.

19. Išspręskite lygtis:

B→19.1. $\log_5(x-7)=0;$

(1 taškas)

Apibrėžimo sritis $x > 7$,

$x - 7 = 5^0$

$x = 8.$

Atsakymas: $x = 8.$

19.2. $\sin x + \sin(2x) = 0.$

(3 taškai)

$sinx + 2sinxcosx = 0$

$sinx\ (1 + 2cosx) = 0$

$sinx = 0$ arba $cosx = -\frac{1}{2},$

$x = \pi k, k \in Z;$ $\quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Atsakymas: $x = \pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z,\ k \in Z.$

B→20. Jurgita gamina ir parduoda apyrankes. Vienos apyrankės pagaminimo išlaidos (savikaina) yra 20 Eur. Iš pradžių Jurgita pardavinėjo apyrankes po 38 Eur ir per mėnesį parduodavo vidutiniškai 10 apyrankių. Ji pastebėjo, kad kiekvienas pardavimo kainos sumažinimas x eurų mėnesio pardavimus vidutiniškai padidina x apyrankių; čia $0 \le x \le 18$.

20.1. Tarkime, kad apyrankės pardavimo kainą Jurgita sumažino x eurų. Parodykite, kad už parduotas apyrankes gautas mėnesio pelnas apskaičiuojamas pagal formulę $P(x) = -x^2 + 8x + 180$.

(2 taškai)

$P(x) = (38 - 20 - x)(10 + x) = (18 - x)(10 + x) = 180 + 18x - 10x - x^2 = 180 - 8x - x^2$

20.2. Nustatykite, su kuria x reikšme pelnas $P(x)$ už parduotas apyrankes bus didžiausias.

(2 taškai)

$P'(x) = -2x + 8,$

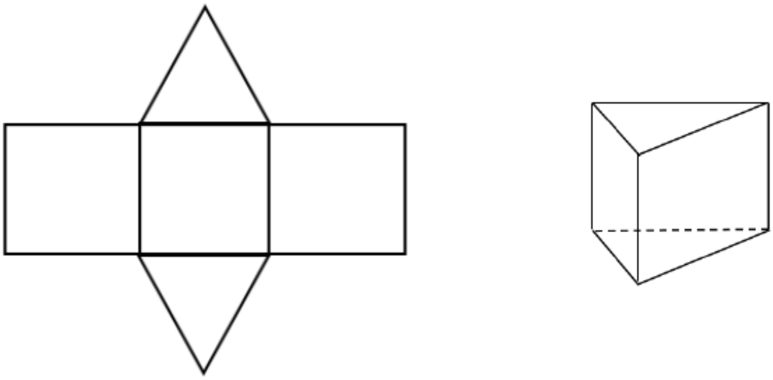
$-2x + 8 = 0,$

$x = 4.$

Kadangi išvestinė, kai $x \in (0; 4)$ yra teigiama, o kai $x > 4$ – neigiama, tai taške 4 yra maksimumas.

Atsakymas: kai $x = 4$.

21. Trikampės prizmės[1] išklotinę sudaro trys kvadratai, kurių kraštinės ilgis lygus 6, ir du trikampiai (žr. 1 pav.).



1 pav.

B➔21.1. Parodykite, kad šios prizmės pagrindo plotas[2] yra lygus $9\sqrt{3}$.

(1 taškas)

$S_{pagr} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ kv. vnt.

Atsakymas: $9\sqrt{3}$ kv. vnt.

B➔21.2. Apskaičiuokite aukštinės ilgį tokios trikampės piramidės[3], kurios pagrindo plotas ir tūris atitinkamai lygūs duotosios prizmės pagrindo plotui ir tūriui.

(3 taškai)

Prizmės aukštinė $h = 6$; Piramidės aukštinę pažymėkime H.

$V_{prizmės} = S_{pagr} \cdot h,$

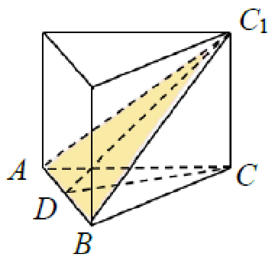
$V_{piramidės} = \frac{1}{3} S_{pagr} \cdot H$

Kadangi tūriai lygūs, tai $\frac{1}{3} S_{pagr} \cdot H = S_{pagr} \cdot h,$

$H = 3h = 3 \cdot 6 = 18.$

Atsakymas: 18.

21.3. Per prizmės šoninių sienų įstrižaines[1] AC_1 ir BC_1 bei pagrindo kraštinę AB nubrėžta plokštuma[2] (žr. 2 pav.).



2 pav.

21.3.1. Prizmės briaunoje[3] AB pažymėtas vidurio taškas D. Įrodykite, kad $C_1D \perp AB$ ir $CD \perp AB$.

(1 taškas)

Nagrinėjame trikampį ABC. Kadangi $AC = BC$, tai pusiaukraštinė CD tuo pačiu yra ir aukštinė, t.y. $CD \perp AB$;

Kadangi trikampis AC_1B lygiašonis, o D – pagrindo vidurio taškas, tai pusiaukraštinė C_1D yra ir aukštinė, o tai reiškia, kad $C_1D \perp AB$.

21.3.2. Apskaičiuokite kampo tarp plokštumų ABC ir ABC_1 tangento reikšmę.

(2 taškai)

Kampas tarp dviejų plokštumų yra kampas tarp statmenų į jų bendrą tiesę. Todėl ieškome tangento

$\angle C_1DC$.

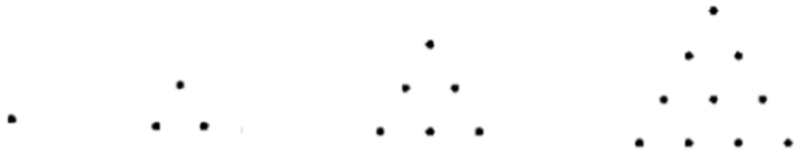
$C_1C = 6$,

$CD = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$,

$tg(\angle C_1DC) = \frac{C_1C}{CD} = \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Atsakymas: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

22. Pitagoras, gyvenęs maždaug V a. pr. Kr. Italijoje, įkūrė mokyklą. Šios mokyklos mokiniai – pitagoriečiai – mėgo tyrinėti ne tik geometrines figūras, bet ir skaičius, kuriuos galima pavaizduoti geometriškai. Pavyzdžiui, natūralųjį skaičių[1] T_n jie vadino trikampiu skaičiumi, jeigu jis lygus vienas po kito einančių n natūraliųjų skaičių, pradedant vienetu, sumai (žr. pav.).



$T_1 = 1$ $T_2 = 1+2=3$ $T_3 = 1+2+3=6$ $T_4 = 1+2+3+4=10$ ir t. t.

B➔22.1. Apskaičiuokite, kam lygus trikampis skaičius T_{18}.

(1 taškas)

$T_{18} = 1+2+3+\dots+18 = \frac{1+18}{2} \cdot 18 = 171.$

Atsakymas: $T_{18} = 171$.

22.2. Ar skaičius 7750 yra trikampis skaičius? Atsakymą pagrįskite.

(2 taškai)

$1+2+3+\dots+n = 7750,$

$\frac{(1+n)n}{2} = 7750,$

$n^2 + n - 15500 = 0,$

$n_1 = 124,\ \ n_2 = -125$ (netinka)

Atsakymas: taip.

22.3. Raskite didžiausią keturženklį trikampį skaičių[2].

(3 taškai)

$1+2+3+\dots+n < 10\,000,$

$\frac{(1+n)n}{2} < 10\,000,$

$n^2 + n - 20\,000 < 0$

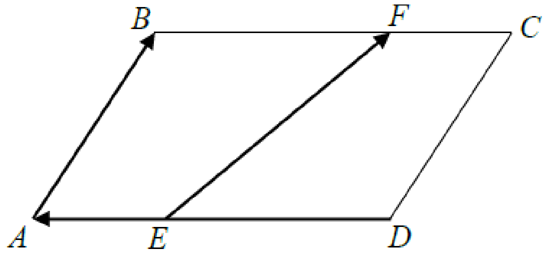
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{80001}}{2} = \frac{-1 \pm 282{,}84\dots}{2}$$

Didžiausias natūralusis n, kuris tenkina nelygybę
$n^2 + n - 20\,000 < 0\ \ yra\ n = 140.$

$T_{140} = 1+2+3+\dots+140 = \frac{1+140}{2} \cdot 140 = 141 \cdot 70 = 9870.$

Atsakymas: $T_{140} = 9870$

23. Lygiagretainio[1] $ABCD$ kraštinėse AD ir BC atitinkamai pažymėti taškai E ir F taip, kad $AE : ED = FC : BF = 1 : 2$. Pažymėję $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$, vektorių $\overrightarrow{EF}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.



(2 taškai)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$

Atsakymas: $\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$

24. Įmonė paskelbė ieškanti studentų darbui vasarą. Į jos skelbimą atsiliepė 3 kartus daugiau vaikinų negu merginų. Jeigu iš atsiliepusiųjų įmonė atsitiktinai pasirinktų du studentus, tikimybė, kad ji pasirinktų dvi merginas, lygi $\frac{1}{20}$. Apskaičiuokite, kiek merginų ir kiek vaikinų atsiliepė į skelbimą.

(3 taškai)

Merginų skaičių pažymėkime *x*; čia x – natūralusis skaičius.

Tuomet vaikinų buvo *3x*, o iš viso buvo *4x* žmonių.

Sudarom lygtį:

$\frac{x}{4x} \cdot \frac{x-1}{4x-1} = \frac{1}{20};$

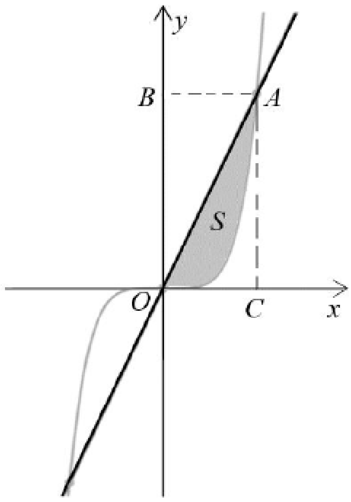
$\frac{x-1}{4x-1} = \frac{1}{5};$

$x = 4.$

Atsakymas: atsiliepė 4 merginos ir 12 vaikinų.

25. Per koordinačių sistemos pradžios tašką O ir funkcijos $f(x)=x^5$ grafiko tašką A, kurio abscisė lygi a ($a>0$), nubrėžta tiesė (žr. pav.). Įrodykite, kad šios funkcijos grafiko ir tiesės, kai $x \geq 0$, ribojamos figūros plotas S yra lygus trečdaliui stačiakampio[1] $ABOC$ ploto; čia $C(a;\, 0)$.

(4 taškai)



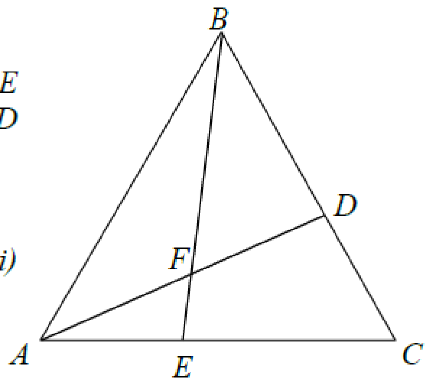
Taško A abscisė a, tuomet jo ordinate yra $f(a) = a^5$.

$S_{OBAC} = a^5 \cdot a = a^6$;

$S_{\Delta AOC} = \dfrac{1}{2}a^6$

$S = \frac{1}{2}a^6 - \int_0^a x^5dx = \frac{1}{2}a^6 - \frac{1}{6}a^6 = \frac{1}{3}a^6 = \frac{1}{3}S_{OBAC}$, ką ir reikėjo įrodyti.

26. Duotas lygiakraštis trikampis[2] ABC. Jo kraštinėse BC ir AC atitinkamai pasirinkti taškai D ir E taip, kad $BD : DC = CE : EA = 3 : 2$. Atkarpos BE ir AD susikerta taške F.



26.1. Įrodykite, kad $\angle AFE = 60°$.

(2 taškai)

Lygiakraščio trikampio kiekvienas kampas lygus 60^0. $\angle ABE = \angle CAD$, nes trikampiai ABE ir ADC yra lygūs (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Tuomet $\angle ABE + \angle FAB = \angle CAD + \angle FAB = 60^0$.

Kampas AFE yra trikampio ABF priekampis, todėl lygus$\angle ABE + \angle FAB = 60^0$.

26.2. Įrodykite, kad $\Delta ACD \sim \Delta AFE$.

(1 taškas)

Kadangi trikampiai ABE ir ADC yra lygūs, tai $\angle ADC = \angle BEA$. $Be\ to, \angle ACD = \angle AFE = 60^0$, tai trikampiai ACD ir AFE yra panašūs, nes turi lygius kampus.

26.3. Apskaičiuokite $AF : FD$.

(3 taškai)

$\Delta AFE \sim \Delta ADC$, todėl $\frac{AF}{FE} = \frac{AC}{CD} = \frac{5}{2}$; Pažymėkime $AF = 5a$, $FE = 2a$;

Analogiškai galima įrodyti, kad $\Delta BFD \sim \Delta BCE$.

$\Delta BFD \sim \Delta BCE$, todėl $\frac{BF}{FD} = \frac{BC}{CE} = \frac{5}{3}$; Pažymėkime $BF = 5b$, $FD = 3b$.

Tuomet $AD = 5a + 3b$, $BE = 5b + 2a$;

Kadangi $AD = BE$, tai $5a + 3b = 5b + 2a$,

$3a = 2b,\ a = \frac{2}{3}b$;

$\frac{AF}{FD} = \frac{5a}{3b} = \frac{5 \cdot \frac{2}{3}b}{3b} = \frac{10}{9}$.

Atsakymas: $\frac{10}{9}$.