matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

XXIII prof. K. Baršausko fizikos konkursas
Kaunas, 2018-03-03
12 klasė (25 balai)

1. Vienas l=4 m ilgio siūlo galas pritvirtintas prie kambario lubų, prie kito siūlo siūlo galo prikabintas mažas rutuliukas. Atstumas nuo lubų iki grindų h=0,5l. Rutuliukas atlenkiamas į šalį taip, kad pasiektų lubas ir paleidžiamas. Besileidžiančio rutuliuko smūgiai į grindis yra absoliučiai tamprūs. Suraskite atstumą s_{13} tarp taškų kuriuose rutuliukas trenkėsi į grindis pirmąjį ir trečiąjį kartą. Oro pasipriešinimo bei siūlo įtempimo jėgų nepaisykite. (4 balai)

Sprendimas.

Kai paleistas rutuliukas pasieks grindis, jo turėta potencinė energija

$$E_p = mgh \tag{1}$$

virs kinetine

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{2}$$

Tuomet iš (1) ir (2) gausime, kad

$$mgh = \frac{mv^2}{2}. \tag{3}$$

Įvertinę, kad h=0,5l, iš (3) gausime

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{gl}. \tag{4}$$

Dėl siūlo poveikio rutuliukas kris ne vertikaliai žemyn, bet pakeis judėjimo kryptį ir į grindis trenksis kampu α. Tokio pat dydžio kampu rutuliukas atšoks nuo grindų. Norėdami surasti laiko tarpą tarp rutuliuko pirmo ir antro smūgio į grindis, naudosime poslinkio lygtį:

$$\vec{s} = \vec{v}t - \frac{\vec{g}t^2}{2}. \tag{5}$$

(5) lygtį suprojektavę į vertikalią ašį gausime

$$0 = v_y t - \frac{gt^2}{2}. \tag{6}$$

Iš čia

$$t = \frac{2v_y}{g}. \tag{7}$$

Projektuodami (5) į horizontalią ašį ir pritaikę (7) lygtį, gausime, kad atstumas tarp pirmo ir antro smūgio į grindis

$$s_{12} = v_x t = \frac{2}{g} v_x v_y. \tag{8}$$

Kadangi

$$v_x = v \sin\alpha \text{ ir } v_y = v\cos\alpha, \tag{9}$$

tai iš (8) ir (9)

$$s_{12} = \frac{2}{g} v^2 \sin\alpha\cos\alpha. \tag{10}$$

Iš uždavinio sąlygos

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{0.5l}{l} = 0.5 \tag{11}$$

ir

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l} = \frac{\sqrt{l^2+(0.5l)^2}}{l} = 0.5\sqrt{3}. \tag{12}$$

Į (10) įstatę (4), (11) ir (12) gausime, kad

$$s_{12} = 0,5\sqrt{3}l. \tag{13}$$

Jei nevertinsime energijos nuostolių, tai atstumas tarp antro ir trečio smūgių į grindis irgi bus toks pat. Tuomet atstumas tarp pirmo ir trečio smūgių bus

$$s_{13} = 2s_{12} = \sqrt{3}l = 1.7 * 4 = 6.8(m). \tag{14}$$

Ats.: $s_{13} = 6.8\ m$.

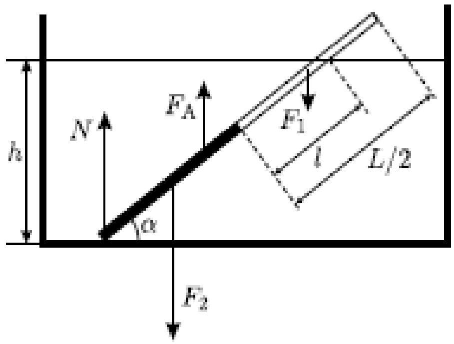
2. Baseino dugne guli L = 1 m ilgio plonas strypas, sudarytas iš dviejų vienodo ilgio ir skerspjūvio dalių. Atitinkami jų tankiai yra $\rho_1 = 500 \,{}^{kg}\!/_{m^3}$ ir $\rho_2 = 2000 \,{}^{kg}\!/_{m^3}$. Į baseiną iš lėto pilamas vanduo, kurio tankis $\rho_v = 1000 \,{}^{kg}\!/_{m^3}$. Kai vandens lygis baseine pasiekia aukštį h, strypas su baseino dugnu sudaro $\alpha = 45^0$ kampą. Apskaičiuokite aukštį h. (4 balai)

Sprendimas.

Vidutinis strypo tankis $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 1250 \,{}^{kg}\!/_{m^3}$ didesnis negu vandens tankis, todėl plaukioti vandens paviršiuje strypas negali ir pilant vandenį sunkesniu galu turi remtis į baseino dugną.

Sunkusis strypo galas bus panardintas į vandenį visiškai, o lengvasis gali būti dalinai iškilęs iš vandens.

Pažymėkime po vandeniu esančią lengvąją strypo dalį l, strypo skerspjūvio plotą S.



Suraskime jėgas, veikiančias strypą. Tai baseino dugno atramos reakcijos jėga N, sunkio jėgos $F_1 = \frac{1}{2} LS\rho_1$ ir $F_2 = \frac{1}{2} LS\rho_2$ ir Archimedo jėga $F_A = \rho_v gS\left(\frac{L}{2} + l\right)$.

Jėgos F_1 ir F_2 veikia atitinkamų strypo dalių masių centrus, o jėga F_A veikia panirusios strypo dalies vidurį.

Užrašykime strypą veikiančių jėgų momentus. Momentus užrašome ašies, statmenos brėžinio plokštumai ir einančios per strypo galo sąlyčio su baseino dugnu tašką. Šiuo atveju atramos reakcijos jėgos N petys bus lygus 0. Pagal momentų taisyklę:

$$\frac{LS\rho_1 g}{2} \cdot \frac{3L\cos\alpha}{4} + \frac{LS\rho_2 g}{2} \cdot \frac{L\cos\alpha}{4} - \rho_v gS\left(\frac{L}{2} + l\right)\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} + l\right)\cos\alpha = 0.$$

Abi šios lygties puses galima padalinti iš $\frac{Sg\cos\alpha}{2}$.

Vandens lygio aukštis h yra tiesiogiai susijęs su panirusia strypo dalimi:

$$h = \left(\frac{L}{2} + l\right)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad l = \frac{h}{\sin\alpha} - \frac{L}{2}$$

Įstatę gautąją l išraišką į jėgos momentų lygtį, apskaičiuojame aukštį h:

$$\frac{L^2}{4}(3\rho_1 + \rho_2) = \rho_v \frac{h^2}{\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L\sin\alpha}{2}\sqrt{\frac{3\rho_1 + \rho_2}{\rho_v}}.$$

Įstačius dydžių vertes, gauname, kad $h \approx 0{,}66\, m$.

3. Raskite maksimalią galimą idealiųjų dujų temperatūrą, kai procesas vyksta pagal dėsnį $p = p_o - \alpha V^2$, čia V- tūris, p –slėgis, p_o pradinis slėgis, α – konstanta. (4 balai)

Sprendimas.

Idealiųjų dujų būvio lygtis $pV = \vartheta RT$

Įstatome slėgio išraišką$(p_o - \alpha V^2)V = \vartheta RT$

Išreiškiame temperatūrą $T = \frac{1}{\vartheta R}(p_o V - \alpha V^3)$

ir surandame išvestine pagal tūrį ir ieškome ekstremumo

$$\frac{dT}{dV} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{\vartheta R}(p_o V - \alpha V^3)\right) = \frac{1}{\vartheta R}(p_o - 3\alpha V^2) = 0$$

Ekstremumo taškas

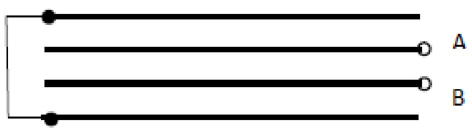
$$V = \sqrt{\frac{p_o}{3\alpha}}$$

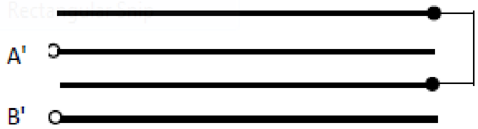
Įstatę į temperatūros išraišką randame maksimalią temperatūrą

$$T_{max} = \frac{1}{\vartheta R}\left(p_o - \alpha\frac{p_o}{3\alpha}\right)\sqrt{\frac{p_o}{3\alpha}} = \frac{2p_o}{3\vartheta R}\sqrt{\frac{p_o}{3\alpha}}$$

4. Keturios vienodos laidžios plokštelės patalpintos ore lygiagrečiai viena kitai atstumu $d = 0.5\ mm$ viena nuo kitos. Kiekvienos plokštelės vieno paviršiaus plotas $S = 100\ cm^2$. Apskaičiuoti:
   1) talpą tarp kontaktų A ir B bei A' ir B' atvejais, parodytais 1 ir 2 paveiksluose;
   2) talpą tarp kontaktų A ir B, gaunamą sujungus gnybtus A su A' bei B su B'.

Jungiamųjų laidų tarpusavio talpos nepaisyti. (4 balai)

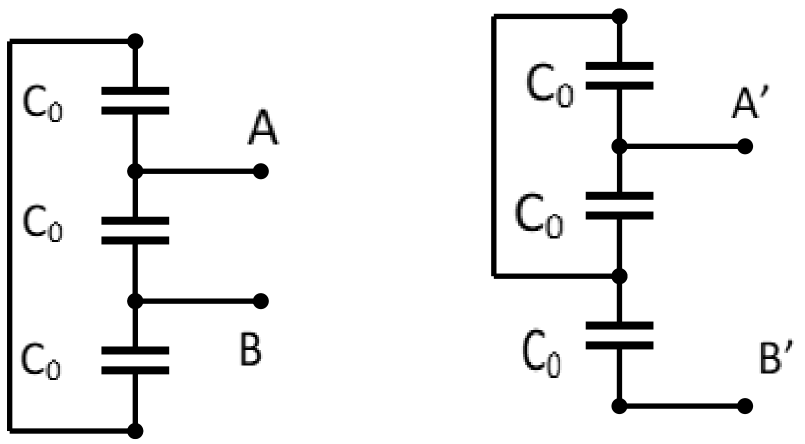




Sprendimas.

Tarp gnybtų A ir B prijungtą talpą sudaro trys vienodi kondensatoriai, kurių kiekvieno talpa $C_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, sujungti pagal 3 paveiksle parodytą ekvivalentinę schemą. Taigi $C_{AB} = \frac{3}{2}C_0$. Tarp gnybtų A'B' talpą sudaro tokie pat kondensatoriai, sujungti pagal 4 paveiksle parodytą schemą: $C_{A'B'} = \frac{2}{3}C_0$.

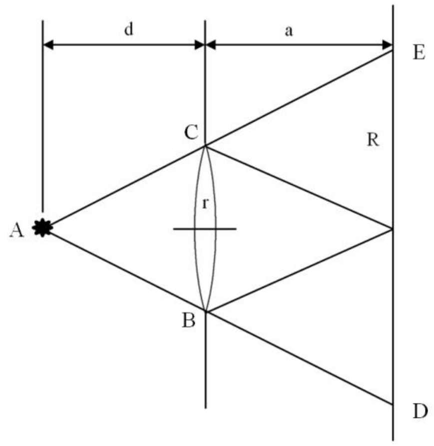
Suminę talpą tarp kontaktų A ir B , gaunamą sujungus gnybtus A su A' bei B su B' ,sudaro C_{AB} ir $C_{A'B'}$ lygiagretus jungimas: $C_{\Sigma} = \frac{13}{6}C_0$.



Atsakymas: $C_{AB} = 265{,}5\ pF$; $C_{A'B'} = 118\ pF$; $C_{\Sigma} = 383{,}5\ pF$.

5. Glaudžiamasis lęšis, kurio židinio nuotolis *F*=6 cm, įstatytas į apskritą angą, esančią neskaidriame ekrane. Angos spindulys *r*=3 cm. Už ekrano 16 cm atstumu gautas ryškus taškinio šviesos šaltinio atvaizdas. Koks bus šviesos disko spindulys *R*, jei išimsime lęšį? (4 balai)

   Sprendimas.
   Nusibraižome brėžinį. Ryškus atvaizdas gausis, kai bus tenkinama plonojo lešio formulė:



$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d}$$

Iš brėžinio matosi, kad trikampiai ∠ABC ir ∠ADE yra panašūs, todėl jiems galioja sąlyga:

$$\frac{2r}{d} = \frac{2R}{(d+a)}$$

Įstatę gauname:

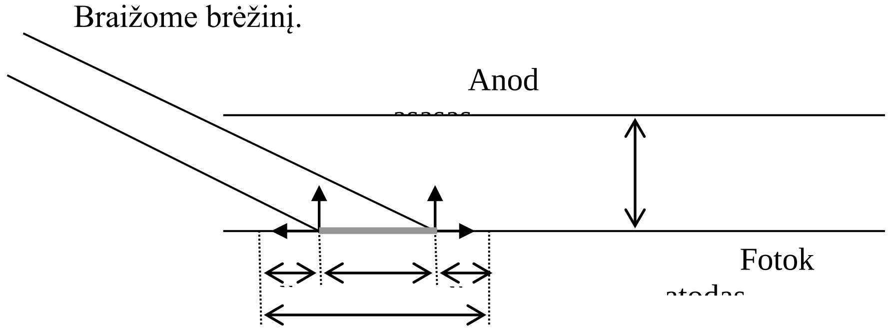
$$R = \frac{ar}{F}$$

Atsakymas: R=8 cm.

6. Fotoelementą sudaro lygiagrečių plokščių fotokatodas ir anodas, tarp kurių atstumas l = 20 mm. Šis atstumas žymiai mažesnis už fotokatodo ir anodo matmenis. Lazerio spindulys fokusuojamas fotokatode į skersmens $d = 1{,}0$ mm dėmę ir sukelia fotoefektą. Fotokatodo medžiagos elektronų išlaisvinimo darbas $A = 3{,}5 \cdot 10^{-19}$ J, o lazerio spinduliuotės bangos ilgis $\lambda = 425$ nm. Tarp fotokatodo ir anodo prijungiamas išmuštus elektronus greitinantis potencialų skirtumas $U = 2{,}0$ kV, verčiantis juos judėti anodo kryptimi pastoviu pagreičiu. Elektronai iš fotokatodo išlekia skirtingomis kryptimis. Koks yra dėmės, į kurią patenka pasiekiantieji anodą elektronai, skersmuo D? Planko konstanta h = 6,63·10^{-34} J·s, šviesos greitis c = 3,0·10^{8} m/s, elektrono masė m = 9,1·10^{-31} kg, elektrono krūvis $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. (5 balai)

Sprendimas

Braižome brėžinį.



Greičių kryptys įvairios, todėl elektronų, pasiekiančių anodą, dėmės dydį nulems elektronai, kurie ties fotokatodo dėmės kraštu sklinda nuo dėmės centro (paveiksle kryptys 1). Taigi,

$D = d + 2\Delta x$.

Čia Δx - tai atstumas, kurį elektronai įveikia kryptimi 1 per laiką t, kurį sugaišta, lėkdami nuo fotokatodo iki anodo.

$\Delta x = vt$, čia v – išmuštų elektronų greitis

Išmuštų elektronų greitį galima apskaičiuoti pritaikius fotoefekto formulę:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + A.$$

Pasinaudojame tuo, kad $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Taigi, $v = \sqrt{\frac{2\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}{m}}$.

Tolygiai greitėjančiam judėjimui be pradinio greičio $l = \frac{at^2}{2}$.

Čia a judėjimo link anodo pagreitis $a = \frac{F}{m}$, $F = eE$ – jėga, kuria elektrinis laukas greitina elektronus, $E = \frac{U}{l}$ – elektrinio lauko stipris, kurį gauname, taikydami plokščiojo kondensatoriaus modelį. Taigi, iš šių lygčių surandame

$$t = l\sqrt{\frac{2m}{eU}}\,.$$

Tada $\boxed{D = d + 4l\sqrt{\frac{\frac{hc}{\lambda} - A}{eU}}}$.

$\boxed{D = 2{,}5 \text{ mm.}}$