ktu
1922
matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

XXV prof. K. Baršausko fizikos konkursas
Kaunas, 2020-10-10
XI klasė (25 balai)

1. Apskaičiuokite mažiausią palydovo apskriejimo aplink neutroninę žvaigždę, kurios tankis $\rho = 1{,}0 \cdot 10^{17}$ kg/m^3, periodą. Gravitacijos konstanta $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2. (4 balai)

Sprendimas:

Duota: $\rho = 1{,}0 \cdot 10^{17}$ kg/m^3
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2
Rasti: T_{min}

h aukštyje virš žvaigždės paviršiaus skriejantį m masės palydovą veikia žvaigždės traukos jėga:

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}\,; \tag{1}$$

čia M – žvaigždės masė, R – žvaigždės spindulys.
Žvaigždės masė:

$$M = \rho V \tag{2}$$

Žvaigždės tūris:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{3}$$

Iš (1), (2) ir (3) lygčių randame, kad:

$$F = \frac{4G\rho\pi R^3 m}{3(R+h)^2} \tag{4}$$

Palydovo įcentrinis pagreitis:

$$a = \frac{v^2}{R+h} \tag{5}$$

II Niutono dėsnis palydovui:

$$F = ma \tag{6}$$

Įrašome (4) ir (5) į (6):

$$\frac{4G\rho\pi R^3 m}{3(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \tag{7}$$

Išreiškiame greitį v:

$$v = \sqrt{\frac{4G\rho\pi R^3}{3(R+h)}} \tag{8}$$

Palydovo apskriejimo aplink žvaigždę periodas:

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} \tag{9}$$

(8) įrašome į (9) ir randame T:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi(R+h)^3}{G\rho R^3}} \tag{10}$$

Periodas T yra mažiausias, kai $h = 0$, todėl:

$$T_{min} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}0\cdot10^{17}}} = 1{,}2\cdot10^{-3}\ \text{s} \tag{11}$$

Atsakymas: mažiausias palydovo apskriejimo aplink neutroninę žvaigždę periodas yra 1,2 ms.

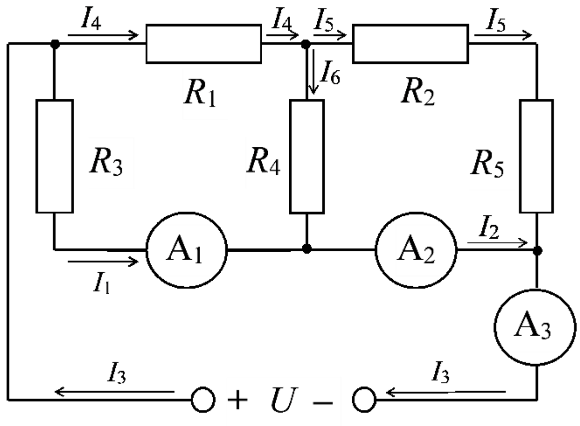
2. Kokius srovių stiprius rodo į grandinę (1 pav.) įjungti idealūs ampermetrai A_1, A_2 ir A_3? Visų grandinės rezistorių varžos vienodos ir lygios 100 Ω. Įtampa U = 10 V. (4 balai)

Sprendimas:

Duota: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 100\ \Omega$
$U = 10$ V
Rasti: I_1, I_2, I_3

Pažymėkime visomis grandinės šakomis tekančių srovių stiprius (1 pav.). Kadangi ampermetrų varža labai maža ir jos galima nevertinti, tai grandinę, kad būtų aiškiau, galima perbraižyti (2 pav.).
Per ampermetrą A_1 tekančios srovės stipris I_1:

$$I_1 = \frac{U}{R_3} = \frac{10}{100} = 0{,}10\ \text{A}$$

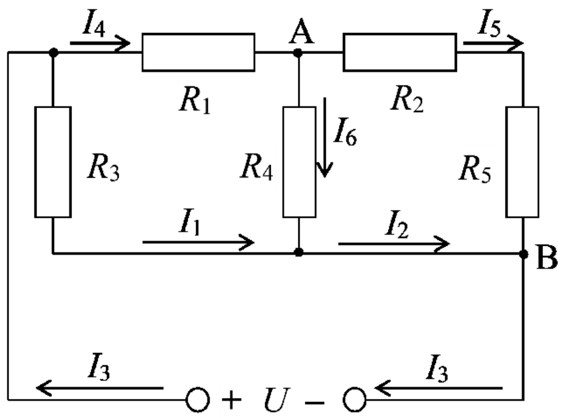


1 pav.

Apskaičiuojame visos grandinės varžą:

$$R = \frac{\left(\frac{(R_2 + R_5)R_4}{R_2 + R_5 + R_4} + R_1\right) R_3}{\frac{(R_2 + R_5)R_4}{R_2 + R_5 + R_4} + R_1 + R_3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{200 \cdot 100}{300} + 100\right) \cdot 100}{\frac{200 \cdot 100}{300} + 200} = 62{,}5\ \Omega$$



2 pav.

Per ampermetrą A_3 tekančios srovės stipris I_3:

$$I_3 = \frac{U}{R} = \frac{10}{62{,}5} = 0{,}16\ \text{A}$$

Kadangi I_3 išsišakoja į I_1 ir I_4, tai

$$I_4 = I_3 - I_1 = 0{,}16 - 0{,}10 = 0{,}06\ \text{A}$$

Tuomet įtampos kritimas rezistoriuje R_1

$$U_{R1} = I_4 R_1 = 0{,}06 \cdot 100 = 6{,}0\ \text{V}$$

Skaičiuojame įtampą tarp taškų A ir B:

$$U_{AB} = U - U_{R1} = 10 - 6{,}0 = 4{,}0\ \text{V}$$

Taikome Omo dėsnį srovei I_5 skaičiuoti:

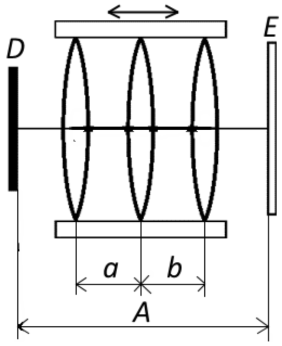
$$I_5 = \frac{U_{AB}}{R_2 + R_5} = \frac{4}{200} = 0{,}02\ \text{A}$$

Kadangi į grandinės mazgą B suteka I_2 ir I_5, tai srovės per ampermetrą A_2 stipris I_2 lygus:

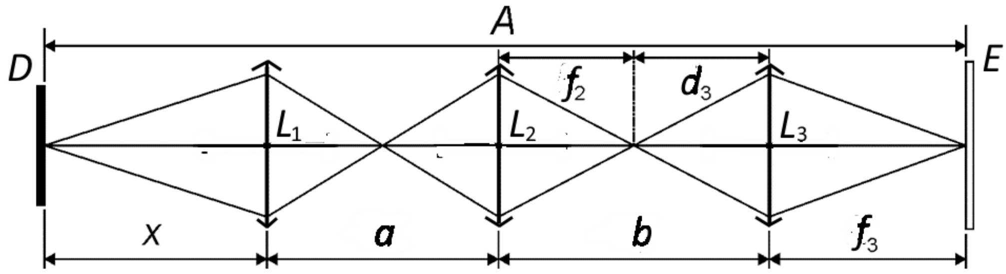
$$I_2 = I_3 - I_5 = 0{,}16 - 0{,}02 = 0{,}14\ \text{A}$$

Atsakymas: ampermetrų A_1, A_2 ir A_3 rodmenys yra atitinkamai 0,10 A, 0,14 A ir 0,16 A.

3. Turime tris vienodo židinio nuotolio F glaudžiamuosius lęšius. Pastatę šiuos lęšius vienas nuo kito atstumais a ir b sukuriame piešinyje pavaizduotą optinę sistemą. Naudojantis šia optine sistema objekto D atvaizdas yra stebimas ekrane E. Atstumas tarp objekto ir atvaizdo ekrane yra A. Mes pastebime, kad visą optinę sistemą, sudarytą iš trijų vienodų lęšių, stumdant pirmyn ir atgal išilgai optinės ašies, atvaizdas ekrane išlieka ryškus. Kokiems atstumams tarp lęšių ir kokiam atstumui tarp objekto ir ekrano esant tai yra įmanoma? Išreikškite šiuos atstumus židinio nuotoliais F. (6 balai)



Sprendimas:



Pažymėkime x atstumą tarp objekto D ir pirmojo lęšio L_1. Remiantis plonojo lęšio formule:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}; \tag{1}$$

čia f_1 yra atstumas tarp pirmojo lęšio ir objekto atvaizdo už jo. Išreiškiame f_1:

$$f_1 = \frac{xF}{x-F} \tag{2}$$

Tuomet atstumas tarp pirmojo atvaizdo ir antrojo lęšio L_2 yra:

$$d_2 = a - f_1 = a - \frac{xF}{x-F}. \tag{3}$$

Šis realus atvaizdas yra objektas antrajam lęšiui, o jo sukuriamas atvaizdas susidaro atstumu f_2 nuo antrojo lęšio. Iš plonojo lęšio formulės gauname:

$$f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F} = \frac{[a - xF/(x-F)]F}{a - F - xF/(x-F)}. \tag{4}$$

Atstumas nuo šio atvaizdo iki trečiojo lęšio L_3 yra $d_3 = b - f_2$. Trečiuoju lęšiu sukuriamas atvaizdas susidaro atstumu f_3 nuo trečiojo lęšio:

$$f_3 = \frac{d_3 F}{d_3 - F} = \frac{(b - f_2)F}{b - f_2 - F}. \tag{5}$$

Atstumas A tarp objekto ir ekrano yra atstumų x, a, b ir f_3 suma:

$$A = x + a + b + \frac{(b - f_2)F}{b - f_2 - F}. \tag{6}$$

Į (6) išraišką įstatę f_2 iš (4) ir pertvarkę gauname:

$$A = a + b + \frac{[ab - 2(a+b)F + 3F^2]x^2 + F^2(a-b)x + F^2[(a+b)F - ab]}{[ab - 2(a+b)F + 3F^2]x + F[aF - (a-F)(b-F)]}. \tag{7}$$

Pagal užduotį, atstumas A nepriklauso nuo x. Tai yra įmanoma tik tuo atveju, jeigu visi prie x esantys daugikliai yra lygūs 0. Panagrinėkime šiuos narius po vieną. Daugiklis prie x formulės (7) skaitiklyje turi būti lygus nuliui:

$$F^2(a-b)=0. \tag{8}$$

Iš to seka, kad $a=b$, taigi gauname, kad trys lęšiai yra išdėstyti vienodais atstumais vienas nuo kito. Pasižymėkime šį bendrą vienodą atstumą a. Perrašome A išraišką (7):

$$A=2a+\frac{[a^2-4Fa+3F^2]x^2+F^2a[2F-a]}{[a^2-4Fa+3F^2]x+F[3aF-a^2-F^2]}. \tag{9}$$

Daugikliai prie x^2 skaitiklyje ir x vardiklyje yra vienodi taigi lieka vienintelis reikalavimas, kuris turi būti tenkinamas:

$$a^2-4Fa+3F^2=0. \tag{10}$$

Spręsdami šią kvadratinę lygtį, randame galimas a vertes (kadangi F laikomas žinomu):

$$a_{1,2}=\frac{4F\pm\sqrt{16F^2-12F^2}}{2}=2F\pm F. \tag{11}$$

Taigi gauname du galimus atsakymus: $a_1=3F$ ir $a_2=F$.

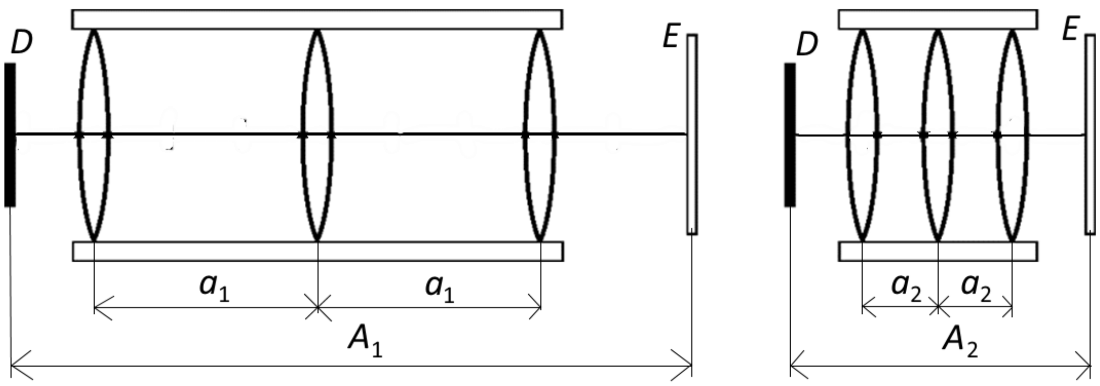
Šias vertes įrašius į atstumo A tarp objekto ir ekrano išraišką (9), gauname du sprendinius:

$$A_1=2a+\frac{F^2a(2F-a)}{F(3aF-a^2-F^2)}=2\cdot 3F+\frac{F^2\cdot 3F(2F-3F)}{F(3\cdot 3F^2-9F^2-F^2)}=9F \tag{12}$$

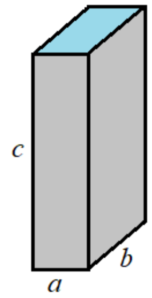
ir

$$A_2=2F+\frac{F^2F(2F-F)}{F(3F^2-F^2-F^2)}=3F. \tag{13}$$

Atsakymas: užduotį tenkina du nepriklausomi sprendiniai: a) pirmuoju atveju atstumas tarp gretimų lęšių yra lygus trims židinio nuotoliams, o atstumas tarp objekto ir ekrano yra lygus devyniems židinio nuotoliams; b) antruoju atveju atstumas tarp gretimų lęšių yra lygus jų židinio nuotoliui, o atstumas tarp objekto ir ekrano yra lygus trims židinio nuotoliams.



4. Metalinis stačiakampio gretasienio formos indas yra pilnai užpildytas vandeniu. Šio indo su vandeniu masė yra *M*. Jei jį pastatysime ant stalo taip, kad didžiausio ploto sienelė liesis su stalu, tai slėgis bus p_1, jei mažiausio ploto sienelė liesis su stalu, tai slėgis bus p_3, jei viduriniojo paviršiaus – p_2. Kokia yra tuščio indo masė? Kokio ilgio yra indo sienelės? Indo sienelės storis yra labai mažas lyginant su jos ilgiu, vandens tankis yra ρ. (*4 balai*)



Sprendimas:

Duota: M – indo su vandeniu masė;
m – vandens masė;
ρ – vandens tankis;
p_1, p_2, p_3 – slėgiai;

Rasti: a, b, c ir $m_{tuščio\ indo}$ - ?

Slėgis išreiškiamas: $p = \frac{F}{S}$, kur F – jėga, S – plotas.
Tuomet atsižvelgiant į indo padėtį gaunama:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{Mg}{bc}, \\ p_2 = \dfrac{Mg}{ac}, \\ p_3 = \dfrac{Mg}{ab}. \end{cases}$$

Išsprendus šią lygčių sistemą, kraštinių ilgiai gaunami:

$$a = \sqrt{\frac{Mgp_1}{p_2p_3}}, \quad b = \sqrt{\frac{Mgp_2}{p_1p_3}}, \quad c = \sqrt{\frac{Mgp_3}{p_1p_2}}.$$

Tuščio indo masė apskaičiuojama iš indo su vandeniu masės (M) atimant vandens masę.
Vandens masė išreiškiama: $m = \rho \cdot V = \rho \cdot a \cdot b \cdot c$

$$m_{tuščio\ indo} = M - m = M - \rho\sqrt{\frac{(Mg)^3}{p_1p_2p_3}}.$$

Atsakymas:

$$a = \sqrt{\frac{Mgp_1}{p_2p_3}}, \; b = \sqrt{\frac{Mgp_2}{p_1p_3}}, \; c = \sqrt{\frac{Mgp_3}{p_1p_2}}, \quad m_{tuščio\ indo} = M - \rho\sqrt{\frac{(Mg)^3}{p_1p_2p_3}}$$

5. Fotonas, kurio energija 5 eV, išplėšia iš metalinės plokštelės paviršiaus elektroną. Kokią energiją turi turėti fotonas, kad maksimalus išlekiančių iš šios plokštelės elektronų greitis būtų du kartus didesnis? Fotoefekto raudonoji riba 350 nm. (*4 balai*)

Sprendimas:

Duota: $E_{f1} = 5$ eV $= 5\cdot1{,}6\cdot10^{-19} = 8\cdot10^{-19}$ J (E_{f1} – fotono energija);
$\lambda_r = 350$ nm $= 3{,}5\cdot10^{-7}$ m (raudoniji riba);
$h = 6{,}626\cdot10^{-34}$ J·s (h – Planko konstanta);
$v_2 = 2v_1$ (elektronų greitis);
$c = 3\cdot10^8$ m/s (šviesos greitis);

Rasti: E_{f2} – ?

Užrašome Einšteino lygtį fotoefektui (du atvejai):

$$\begin{cases} E_{k1} = E_{f1} - A & (1) \\ E_{k2} = E_{f2} - A & (2) \end{cases}$$

Čia E_{k1} ir E_{k2} – elektrono energija, E_{f1} ir E_{f2} – fotono energija, A – išlaisvinimo darbas.

Įstatome į kinetinės energijos išraišką elektrono greitį (žinoma, kad $v_2 = 2v_1$) :

$$\begin{cases} \frac{mv_1^2}{2} = E_{f1} - A & (3) \\ \frac{4mv_1^2}{2} = E_{f2} - A & (4) \end{cases}$$

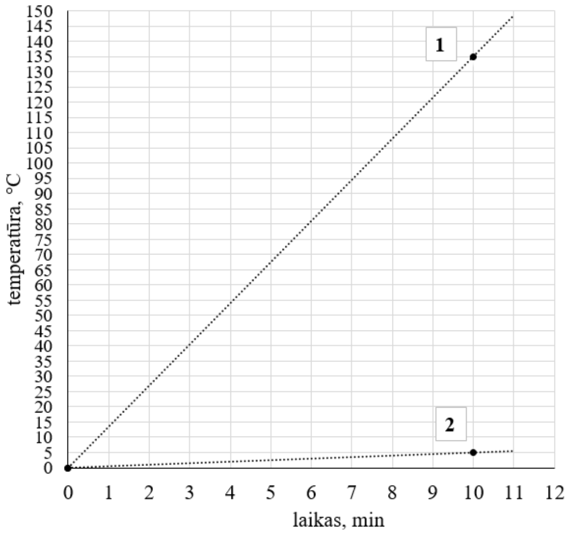
Padaliname lygtis (4) iš (3) ir išreiškiame E_{f2}:

$$4 = \frac{E_{f2}-A}{E_{f1}-A} \quad \rightarrow \quad E_{f2} = 4E_{f1} - 3A = 4E_{f1} - 3\frac{hc}{\lambda_r} = 4\cdot8\cdot10^{-19} - \frac{3\cdot6{,}626\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{3{,}5\cdot10^{-7}} = 15\cdot10^{-19}\,J.$$

Atsakymas:

$$E_{f2} = 15\cdot10^{-19}\,J \approx 9{,}4\ eV$$

6. Per dešimt minučių dviems variniams rutuliukams buvo suteikitas vienodas šilumos kiekis. Grafike pateiktos rutuliukų temperatūros priklausomybės nuo laiko. Kiek kartų antrojo rutuliuko spindulys didesnis nei pirmojo? (Šilumos nuostolių nepaisome). (3 balai)



Sprendimas:

Duota: $\boldsymbol{Q_1 = Q_2}$;

$\tau = 10$ min;

$t_1 = 135$ °C;

$t_2 = 5$ °C;

$\rho = 8900$ kg/m^3;

Rasti: $\frac{r_2}{r_1} - ?$

Rutuliams per tą patį laiką suteikti vienodi šilumos kiekiai:

$$\boldsymbol{Q_1 = m_1 c t_1} \text{ ir } \boldsymbol{Q_2 = m_2 c t_2} \quad (\boldsymbol{Q_1 = Q_2});$$

$$\boldsymbol{m_1 = \rho \cdot V_1 = \rho \frac{4}{3} \pi r_1^3} \text{ ir } \boldsymbol{m_2 = \rho \cdot V_2 = \rho \frac{4}{3} \pi r_2^3} \ ;$$

$$\boldsymbol{Q_1 = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r_1^3 \cdot c \cdot t_1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r_1 = \sqrt[3]{\frac{Q_1}{\frac{4}{3} \pi \cdot \rho \cdot c \cdot t_1}}} \quad \text{ir} \quad \boldsymbol{r_2 = \sqrt[3]{\frac{Q_2}{\frac{4}{3} \pi \cdot \rho \cdot c \cdot t_2}}}$$

Gauname rutuliukų spindulių santykį:

$$\boldsymbol{\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{t_1}{t_2}} = \sqrt[3]{\frac{135}{5}} = \sqrt[3]{27} = 3}$$

Atsakymas:

$\frac{r_2}{r_1} = 3$