

Kaunas, 2022-03-05

12 klasė (25 balai)

1. Uždavinys

Vandenyje, 5 m gylyje gulėjęs 0,6 m³ tūrio akmuo kranu tolygiai pakeliamas 3 m virš vandens. Akmens tankis 2500 kg/m³, o vandens 1000 kg/m³. Laisvojo kritimo pagreitis 10 m/s². Krano galia 45 kW, o naudingumo koeficientas 50 %. Vandens pasipriešinimo akmenį judėjimui nepaisykite. Raskite kiek laiko akmuo keliamas vandenyje ir virš vandens. (3 balai)

Sprendimas

Duota:

Vandens gylis – $h_p = 5$ m, aukštis virš vandens – $h_v = 3$ m, Akmens tūris – $V_{ak} = 0,6$ m³, akmens tankis – $\rho_{ak} = 2500$ kg/m³, vandens tankis – $\rho_{sk} = 1000$ kg/m³, Laisvo kritimo pagreitis – $g = 10$ m/s², krano galia – $N = 45$ kW, ir naudingumo koeficientas – $\alpha = 50$ %.

Rasti: Akmens kėlimo laiką vandenyje – t_p , ir virš vandens – t_v .

1. Pirma randame akmens masę ir jį veikiančias jėgas po vandeniu ir virš vandens. Kai akmuo yra po vandeniu jis dalį vandens išstumia, todėl ieškome sunkio ir Archimedo jėgas. Kai akmuo yra ore ieškome tik sunkio, nes jį veikia tik gravitacija.

$$m_{ak} = \rho_{ak} V_{ak} = 2500 * 0.6 = 1500 \text{ kg}$$

$$F_p = m_{ak}g - \rho_{sk}V_{ak}g$$

$$F_v = m_{ak}g$$

2. Toliau ieškome kokiu greičiu tolygiai akmuo keliamas tiek vandenyje v_p , tiek ore v_v . Tam naudojame pakeista potencinės energijos lygį, krano naudingą galią ir akmenį veikiančias jėgas atitinkamoje terpėje.

$$E_p = mgh \rightarrow \frac{E_p}{t} = mg \frac{h}{t} \rightarrow N_{naudingas} = Fv \rightarrow v = \frac{N_{naudingas}}{F} = \frac{\alpha N}{F}$$

$$v_p = \frac{\alpha N}{F_p} = \frac{\alpha N}{m_{ak}g - \rho_{sk}V_{ak}g} = \frac{0.5 * 45000}{1500 * 10 - 1000 * 0.6 * 10} = 2.5 \text{ m/s}$$

$$v_v = \frac{\alpha N}{F_v} = \frac{\alpha N}{m_{ak}g} = \frac{0.5 * 45000}{1500 * 10} = 1.5 \text{ m/s}$$

3. Pagal akmenį iškeltą aukštį ir greitį atitinkamoje terpėje galima rasti kiek laiko akmuo keliamas vandenyje t_p ir virš vandens t_v .

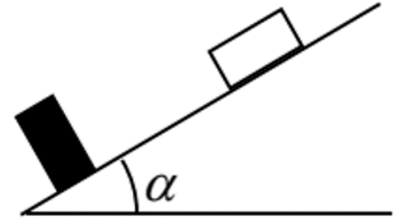
$$t_p = \frac{h_p}{v_p} = \frac{5}{2.5} = 2 \text{ s}$$

$$t_v = \frac{h_v}{v_v} = \frac{3}{1.5} = 2 \text{ s}$$

Ans.: $t_p = 2\text{s}$, $t_v = 2\text{s}$.

2. Uždavinys

Ant nuožulnios plokštumos, kurios kampas α yra padedamas mažas kūnas. Atstumu $l=2\text{m}$ nuo kūno yra tamprė sienelė. Trinties koeficientas tarp kūno ir plokštumos yra $k=(1/2)\text{tg}\alpha$. $\alpha=30^\circ$. Kūnas yra paleidžiamas. Jis slysta žemyn, atsitrenkia nuo sienelės, pakyla, atgal, vėl leidžiasi, vėl atsitrenkia ir t.t. Koks bus kūno kelio ilgis iki tol, kol jis visiškai sustos. Laikyti, kad kūno susidūrimas su senele yra absoliučiai tamprus. **(4 balai)**



Sprendimas

Kadangi $k < \text{tg}\alpha$, kūnas slys plokštuma žemyn ir galiausiai sustos tik ties senele. Tačiau, nežiūrint į tai kad kūnas po atsitrenkimo daug kartų kils, leisis ir vėl kils, sunkio jėgos darbas bus lygus potencinės energijos pokyčiui:

$$A_s = mgl\sin(\alpha) \quad (1)$$

Tačiau, energijos tvermės dėsnis teigia, kad visas darbas, judant kūnui yra lygus šioje sistemoje sunkio A_s ir trinties jėgos darbo A_{tr} :

$$A_{tr} = kmg\cos(\alpha)S \quad (2)$$

sumai. Tačiau reikia turėti omenyje, kad bendrai energijai nesikeičiant, vykstant darbo procesui, viena energijos rūšis virsta kita, todėl galime sulyginti A_s ir A_{tr} . Iš to seka:

$$mgl\sin(\alpha) = kmg\cos(\alpha)S \quad (3)$$

Iš to seka, kad kūno kelio ilgis iki tol, kol jis visiškai sustos:

$$S = \frac{l\text{tg}(\alpha)}{k} = 2l \quad (4)$$

Atsakymas: S=4 m.

3. Uždavinys

Paveiksle pavaizduotas ciklinis procesas, kurį atlieka deguonies dujos. Žinoma, kad šiame cikliniame procese didžiausias pasiekiamas dujų tūris $16,4 \text{ dm}^3$. Raskite dujų masę ir tūrį taške 1. (4 balai)

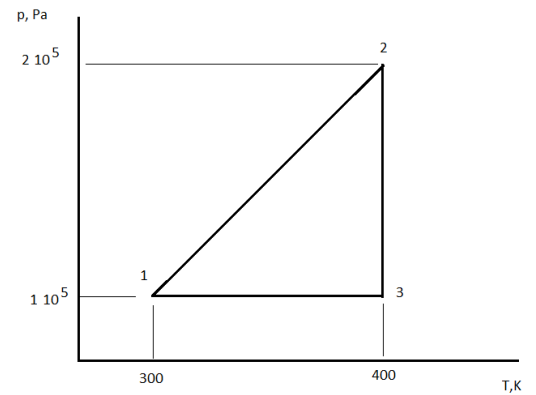
Sprendimas

Kadangi $V \sim T/p$, didžiausias tūris yra taške 3, taigi $V_3 = 16,4 \text{ dm}^3$

3-1 izobarinis procesas

$$V_1 = V_3 T_1 / T_3 = 12,3 \text{ dm}^3$$

$$m = p_1 V_1 M / RT_1 = 16 \text{ g}$$



4. Uždavinys

Turimas vienas kilomolis idealiųjų dujų, kurių plėtimasis aprašomas dėsnio $\frac{P}{V} = const$. Šio proceso metu dujų tūris išaugo tris kartus, o jų vidinė energija padidėjo $9,972 \cdot 10^6$ J. Kokia buvo dujų pradinė temperatūra? (4 balai)

Sprendimas

Dujų vidinė pradinė energija

$$U_1 = \frac{i}{2} \nu R_1 T_1. \quad (1)$$

Čia i – dujų laisvės laipsnių skaičius (idealiosioms dujoms - 3), ν – medžiagos kiekis, R – universalioji dujų konstanta, T – absoliutinė temperatūra.

Taikant idealiųjų dujų būvio lygtį

$$pV = \nu RT, \quad (2)$$

dujų vidinę energiją galime užrašyti taip

$$U_1 = \frac{i}{2} p_1 V_1$$

Iš sąlygos matome, kad dujų slėgiui padidėjus 3 kartus, tiek pat kartų padidės ir jų tūris. Tai galinė dujų vidinė energija bus

$$U_2 = \frac{i}{2} 9 p_1 V_1 \quad (3)$$

Tuomet

$$\Delta U = 4 i p_1 V_1 \quad (4)$$

Dar kartą pritaikius (2) lygtį gauname

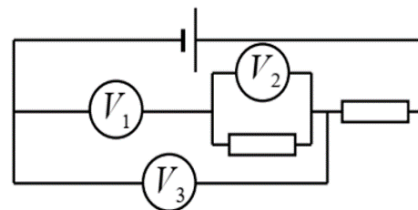
$$\Delta U = 4 i \nu R_1 T_1. \quad (5)$$

Iš čia

$$T_1 = \frac{\Delta U}{4 i \nu R_1} = 100 \text{ K}$$

5. Uždavinys

Elektrinė grandinė (žr. pav.) yra sudaryta iš „idealaus“ maitinimo šaltinio, trijų vienodų voltmetrų ir dviejų vienodų rezistorių. Yra žinoma, kad V_1 voltmetro parodymai skiriasi nuo V_2 voltmetro parodymų 3 kartus, o V_3 voltmetras rodo įtampą $U_3=10$ V. Kokia yra maitinimo šaltinio įtampa? (5 balai)



Sprendimas

Tarkim voltmetro varža yra lygi R . Raskime atskiro rezistoriaus varžą r . Voltmetras rodo įtampą (potencialų skirtumą), kuri yra tarp jo pajungimo kontaktų. Todėl, remiantis Omo dėsnio grandinės daliai ir voltmetrų vienodumo sąlyga (visi jie turi vienodą varžą) seka, kad srovės, tekančios pro vieną iš V_1 ar V_2 voltmetrų stipris yra trigubai mažesnis, nei per V_3 . Tačiau srovė, tekanti pro voltmetrą V_1 , lygiagrečioje sujungimo grandinėje (V_2 ir rezistorių) dalinasi. Todėl voltmetro V_2 įtampos parodymai yra mažesni 3 kartus, nei V_1 . Iš to galima daryti išvadą, kad srovės, tekančios pro rezistorių (lygiagretų V_2 voltmetrui) stipris yra 2 kartus didesnis, nei tekančios pro voltmetrą V_2 .

Iš to seka, kad voltmetro varža yra dvigubai didesnė, nei rezistoriaus.

$$R = 2r \quad (1)$$

Todėl grandinės dalies, sudarytos iš voltmetro V_1 ir lygiagrečios (V_2 ir rezistoriaus) dalies varža yra lygi:

$$2r + \frac{r2r}{(r+2r)} = \frac{8}{3}r \quad (2)$$

Jei pro voltmetrą V_3 teka srovė, kurios stiprį pavadinkime I_1 , tai pro grandinės dalį, sudarytą iš iš voltmetro V_1 ir lygiagrečios (V_2 ir rezistoriaus) dalies, srovės stipris bus lygus:

$$I = \frac{3}{4}I_1 \quad (3)$$

Iš to seka, kad per vieną rezistorių teka srovė, kurią galime pavadinti I_2 ir kurios stipris yra:

$$I_2 = \frac{3}{4}I_1 + I_1 = \frac{7}{4}I_1 \quad (4)$$

O įtampa esanti rezistoriaus galuose yra lygi:

$$U = \frac{7}{4}I_1 r = \frac{7}{8}IR \quad (5)$$

Bet IR – tai yra įtampa, kurią rodo voltmetras V_3 . Todėl $IR=10$ V, o maitinimo šaltinio įtampa yra lygi:

$$U_{\text{mait}} = U_3 + \frac{7}{8}U_3 = \frac{15}{8}U_3 = 18,75 \text{ V} \quad (6)$$

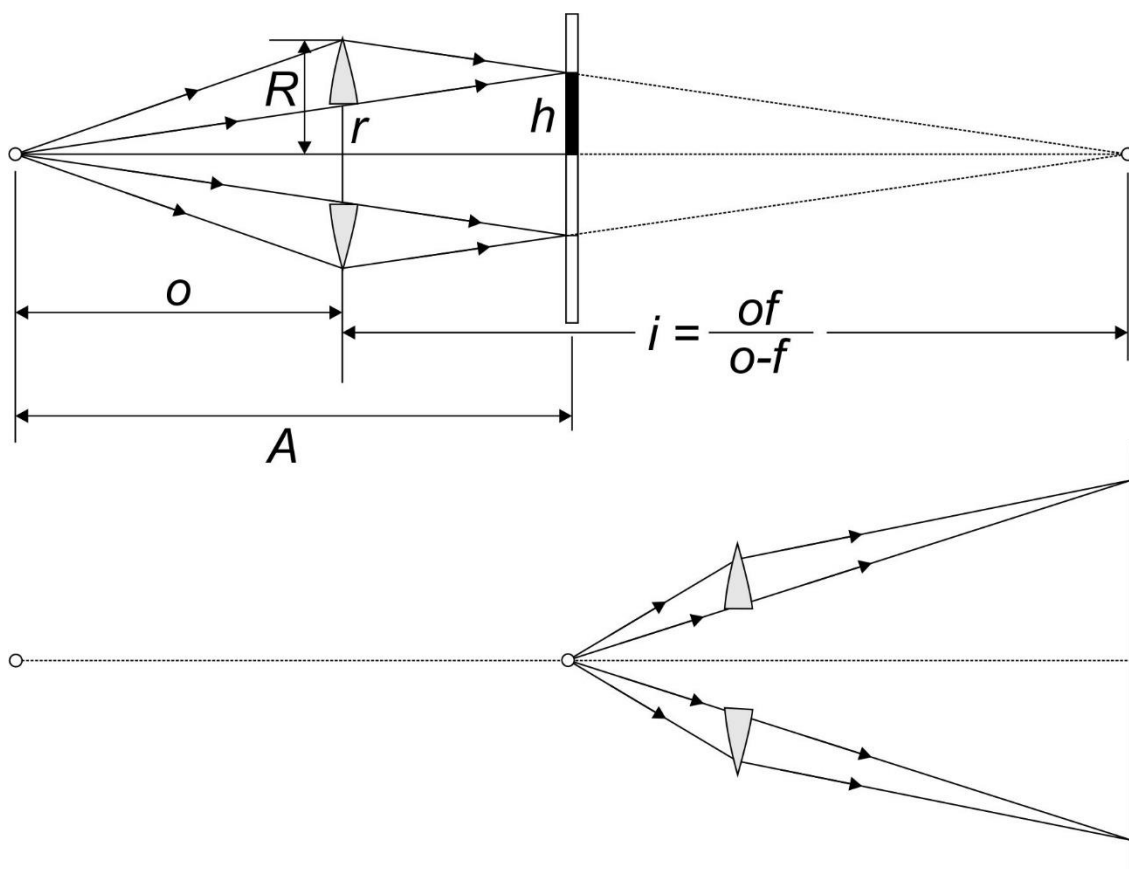
Atsakymas: $U_{\text{mait}}=18,75$ V

6. Uždavinys

Plonojo apskrito glaudžiamojo lęšio, kurio židinio nuotolis yra $f = 4$ cm, viduryje yra apskrita kiaurymė. Šios kiaurymės skersmuo lygus pusei lęšio skersmens. Taškinis šviesos šaltinis yra pastatytas $A = 9$ cm atstumu nuo sienos. Kur reikia pastatyti lęšį, kad ant sienos matytųsi vientisa apskrita dėmė su ryškiu kraštu. **(5 balai)**

Sprendimas

Šviesos kūgis praėjęs per apskritą apertūrą lęšio centre bei šviesos kūgis, kuris susiformuoja šviesai lūžus lęšyje, turi tiksliai persikloti sienos plokštumoje. Pasižymėkime ant sienos susiformavusios šviesos dėmės spindulį raide h , kiaurymės lęšyje spindulį – r , o lęšio spindulį – $R = 2r$. Atstumą tarp šviesos šaltinio ir lęšio pasižymėkime o .



Iš plonojo lęšio išraiškos $\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$ (1) žinome, kad atstumas tarp lęšio ir šviesos šaltinio atvaizdo ant sienos yra $i = \frac{of}{o-f}$ (2).

Iš panašiujų trikampių:

$$\frac{h}{r} = \frac{A}{o} \quad (3) \quad \text{ir} \quad \frac{h}{R} = \frac{h}{2r} = \frac{o+i-A}{i} = \frac{o+\frac{of}{o-f}-A}{\frac{of}{o-f}} \quad (4).$$

Iš (3) išraiškos $\frac{h}{r}$ gali būti įstatyta į (4) išraišką tokiu būdu gaunant kvadratinę lygtį nuo o :

$$2o^2 - 2Ao + Af = 0 \quad (5)$$

Jos sprendiniai yra:

$$o = \frac{A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A(A - 2f)} \quad (6).$$

Nagrinėjama atveju gauname dvi galimas šviesos šaltinio padėčių vertes: $o_1 = 6$ cm ir $o_2 = 3$ cm. Pirmuoju atveju lęšis turi būti pastatytas 6 cm nuo šviesos šaltinio. Antrasis sprendinys taip pat yra teisingas nors šiuo atveju atvaizdas yra menamas. (Sprendimas $o=0$ yra trivialus). Ši užduotis gali būti išspręsta tik kai tenkinama sąlyga $A > 2f$.